Федеральное агентство по образованию
Байкальский государственный университет экономики и права

Р.З. Абдуллин
В.Р. Абдуллин

МАТЕМАТИКА-1
РЯДЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник задач

Иркутск
Издательство БГУЭП
2008

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.161.6я7
М 34

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета экономии и права

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. А.В. Лакеев

М 34 Математика-1. Ряды, дифференциальные уравнения: сб. зад. / Р.З. Абдуллин, В.Р. Абдуллин. – Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2008. – 65 с.

Подобраны и методически распределены задачи по разделам «Ряды» и «Обыкновенные дифференциальные уравнения» программы курса «Математика-1». В начале каждого пункта приведены: необходимые для решения задач теоретические сведения; разобраны примеры решения типичных задач этих пунктов. Для каждого раздела приведены варианты контрольных работ по теоретической части (в виде теста) и по решению задач.

Для студентов первого курса экономических специальностей.

ББК 22.161.6я7

Оглавление

Введение

Сборник задач предназначен для проведения практических занятий, выполнения домашних заданий и самостоятельной работы студентов по разделам «Ряды» и «Обыкновенные дифференциальные уравнения» курса Математика-1.

Первый раздел «Ряды» включает числовые, степенные ряды и ряды Фурье. Каждый пункт раздела сопровождается необходимыми теоретическими сведениями, примерами решения стандартных задач. Раздел завершается примерными вариантами теоретической контрольной работы в виде теста и контрольной работы по решению задач раздела.

Раздел «Обыкновенные дифференциальные уравнения» содержит методы интегрирования простейших дифференциальных уравнений: уравнений с разделяющимися переменными, однородных уравнений, линейных уравнений первого порядка, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах, линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Каждый пункт раздела также сопровождается необходимыми сведениями, примерами нахождения решений дифференциальных уравнений рассматриваемого вида, содержит примеры дифференциальных уравнений возникающих при математическом моделировании некоторых экономических процессов. Раздел также содержит варианты теоретической и практической контрольных работ.

1. Ряды

1.1. Числовые ряды

1.1.1. Основные понятия

Пусть a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, $\ldots$ – бесконечная числовая последовательность с общим элементом $a_n = f(n)$. Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется *числовым рядом*, числа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, $\ldots$ – *членами ряда*, a_n – *общим членом ряда*. Числовой ряд кратко обозначается как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сумма первых n членов числового ряда называется n*-й частичной суммой ряда* и обозначается S_n, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Частичные суммы ряда образуют бесконечную числовую последовательность $\{S_n\}$.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ сходится к некоторому числу S, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, число S называется *суммой ряда*. Символически это записывается так: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если последовательность частичных сумм ряда расходится, то ряд называется *расходящимся*.

Пример 1.1. Установить сходимость следующих числовых рядов:

1) *геометрического ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$;

2) *гармонического ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$.

Решение.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ его n-я частичная сумма $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$ является суммой n первых членов геометрической прогрессии, поэтому $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$. При $|q|<1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q}.$$

Следовательно, геометрический ряд при $|q|<1$ сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$. При $|q|>1$ геометрический ряд расходится, так как $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \infty$. При $q=1$ получаем $S_n = na$, отсюда $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$; при $q=-1$ для n нечетных $S_n = a$, а для n четных $S_n = 0$. Следовательно, при $q=\pm 1$ последовательность частичных сумм геометрического ряда расходится, значит и сам ряд расходится. *Таким образом, при* $|q|<1$ *геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ *сходится и имеет сумму равную* $\frac{a}{1-q}$, *а при* $|q|\geq 1$ *расходится.*

2) Предположим, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ сходится и его сумма равна S. Рассмотрим разность частичных сумм S_{2n} и S_n. Из сходимости ряда имеем $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$. С другой стороны имеем

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}$, что противоречит предыдущему. Следовательно, предположение о *сходимости гармонического ряда неверно и он расходится.*

3) Общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ представим в виде $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Тогда

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$. Таким образом, данный ряд сходится и его сумма равна 1.

Свойства сходящихся рядов

1. *Отбрасывание или приписывание конечного числа начальных членов не изменяет сходимости ряда, т.е. из сходимости ряда* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *следует сходимость ряда* $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{m+n} + \ldots$ *и наоборот, где* m *любое натуральное число.*

2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и его сумма равна числу* S*, то для любого числа* l *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l\cdot a_n$ *также сходится и его сумма равна* $l\cdot S$.

3. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и их суммы равны соответственно* S *и* s *, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ *также сходится и имеет сумму равную* $S \pm s$.

4. *<u>Необходимое условие сходимости ряда</u>: если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Выполнение необходимого условия сходимости, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, не обеспечивает сходимость ряда. Например, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, но гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 1.2. Исследовать сходимость рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(0,5-0,1^n)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}$.

Решение.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$ расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(0,5-0,1^n) = 0,5$. Необходимое условие сходимости ряда не выполнено, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(0,5-0,1^n)$ расходится.

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10} = \frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{n+10}+\ldots$ получается из расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ отбрасыванием первых десяти членов, поэтому в силу первого свойства он расходится.

1.1. Выписать первые четыре члена ряда заданного общим членом:

1) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; 2) $a_n = \frac{n}{10^n + n}$;

3) $a_n = \frac{9}{10^n - 1}$; 4) $a_n = \frac{2^n}{n!}$;

5) $a_n = \dfrac{2n+1}{2n^2-1}$;   6) $a_n = \dfrac{(n-1)!}{2^n}$.

1.2. Найти общий член ряда:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots$;   2) $1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}-\frac{1}{4^a}+\ldots$;

3) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$;   4) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+\ldots$;

5) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{37}+\ldots$;   6) $1+2\frac{1}{4}+2\frac{7}{9}+3\frac{1}{16}+3\frac{6}{25}+\ldots$;

7) $\frac{3}{6}+\frac{5}{26}+\frac{9}{126}+\frac{17}{626}+\ldots$;   8) $2+10+26+82+242+730+\ldots$;

9) $1+\frac{\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{4}}{6}+\frac{\sqrt{5}}{24}+\ldots$.

1.3. Исходя из определения, установить сходимость следующих рядов и найти суммы сходящихся рядов:

1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$;   2) $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\ldots$;

3) $4-8+16-32+64-\ldots$;   4) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$;

5) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$;   6) $\sum_{n=1}^{\infty}(2+0,5^n)$;

7) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$;   8) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots$;

9) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$;   10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;   12) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$.

1.4. Проверить выполнение необходимого условия сходимости для рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^2+2n}$;   2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n-2}{2n^2+n}$;   3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n+5}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(2^n+1)^2}$;   5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n}$.

1.1.2. Признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами

<u>*Признак сравнения.*</u> *Если для рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *с неотрицательными членами, начиная с некоторого* n_0, *выполняется неравенство* $a_n \le b_n$, *то из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *а из расходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>*Признак сравнения в предельной форме.*</u> *Если для рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *с положительными членами* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k$ *и* $0 < k < \infty$, *то оба ряда одновременно сходятся или расходятся.*

<u>*Признак Даламбера.*</u> *Если для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами начиная с некоторого номера* n_0 *выполняется неравенство* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, *то при* $0 < q < 1$ *этот ряд сходится; если же начиная с некоторого номера* n_0 *выполняется неравенство* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, *то ряд расходится.*

<u>*Признак Даламбера в предельной форме.*</u> *Если для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами существует предел* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *то при* $q < 1$ *этот ряд сходится, а при* $q > 1$ *расходится.*

<u>*Признак Коши.*</u> *Если для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = k$, *то при* $k < 1$ *ряд сходится, а при* $k > 1$ *расходится.*

<u>*Интегральный признак.*</u> *Если для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с* $a_n = f(n)$ *функция* $f(x)$ *положительна, непрерывна и убывает на полуинтервале* $[1, +\infty)$, *то из сходимости интеграла* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *а из расходимости интеграла* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1.3. *По признаку сравнения установить сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

Решение. При любых n справедливо неравенство $\ln(n+1)<n+1$, отсюда $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$ при любых n. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится, так как получается из расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ отбрасыванием первого члена, следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ расходится.

Пример 1.4. Используя интегральный признак, определить при каких положительных значениях a *обобщенный гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ сходится.

Решение. При $a>0$ функция $f(x)=\frac{1}{x^a}$, задающая общий член ряда, является непрерывной, положительной и убывающей на $[1,+\infty)$. Определим сходимость интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx$. При $a\neq 1$ имеем $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^a}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-a}(b^{1-a}-1)$. Отсюда при $0<a<1$ получаем $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx=\infty$, а при $a>1$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx=\frac{1}{a-1}$. При $a=1$ имеем $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$. Таким образом, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx$ сходится при $a>1$ и расходится при $a\le 1$, следовательно, по интегральному признаку *обобщенный гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ *сходится при* $a>1$ *и расходится при* $a\le 1$.

Пример 1.5. По признаку сравнения установить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^2 2^n}$.

Решение. Используем признак сравнения в предельной форме. Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+1}{n^2 2^n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n}=1,$$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^2 2^n}$ сходится.

Пример 1.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

Решение. Для любых n справедливы неравенства $(n+1)^{n+1}\ge 2^{n+1}>2^n$, отсюда для любых n выполняется $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{2^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится как геометрический ряд со знаменателем q равным 1/2. Отсюда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

Пример 1.7. По признаку Даламбера исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$.

Решение. Используем признак Даламбера в предельной форме: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}}{\frac{2^n}{n^{10}}}=\lim_{n\to\infty}2(\frac{n}{n+1})^{10}=\lim_{n\to\infty}2(1-\frac{1}{n+1})^{10}=2$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, следовательно, этот ряд расходится.

Пример 1.8. По признаку Даламбера исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$.

Решение. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(\frac{n+1}{n})^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{3}<1$. Отсюда по признаку Даламбера в предельной форме получаем, что исследуемый ряд сходится.

Пример 1.9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Здесь удобней применить признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1$, следовательно, по признаку Коши исследуемый ряд расходится.

Пример 1.10. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Решение. Применим интегральный признак: функция $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, задающая общий член ряда, положительна, непрерывна и убывает при $x\ge 1$; интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_1^{+\infty} = \infty$$

расходится, поэтому расходится и данный ряд.

1.5. Сравнением с гармоническим рядом или сходящимся геометрическим рядом исследовать сходимость рядов:

1) $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots$; 2) $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2n+1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n+1}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^2+2n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^{2n}+n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(2^n+1)}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^{n-1}}$.

1.6. По признаку Даламбера исследовать сходимость рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{3^n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^2+2n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{2n^2+1}$.

1.7. По признаку Коши установить сходимость рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{3n^2-n}{4n^2+n}\right)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-n}{n^2+2n}\right)^{3n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{4n^2-1}\right)^{n/2}$.

1.8. Пользуясь интегральным признаком, исследовать сходимость рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{2n-1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{n^2+3n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-2}{n^2}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{1+n^2}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10}{(10n-1)\ln(10n-1)}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$.

1.9. Исследовать сходимость рядов:

1) $1+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{5\sqrt{5}}+\dfrac{1}{7\sqrt{7}}+\ldots$;

2) $1+\dfrac{1}{101}+\dfrac{1}{201}+\dfrac{1}{301}+\ldots$;

3) $\dfrac{1}{1+1^4}+\dfrac{2}{1+2^4}+\dfrac{3}{1+3^4}+\ldots$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{n^2}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{(2n-1)!}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{n!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{2^n n!}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-2}{\sqrt{n^2+3n-2}}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^5}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+2)3^n}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n(n+1)}{3^n}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$.

1.1.3. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость

Ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$, где $a_n > 0$ для всех n, называется *знакочередующимся рядом*.

<u>*Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.*</u> *Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают* ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$) *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами произвольных знаков называется *знакопеременным рядом*. Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

<u>*Признак сходимости знакопеременного ряда.*</u> *Знакопеременный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *составленный из модулей его членов. В этом случае исходный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется абсолютно сходящимся. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится.*

Пример 1.11. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение. Данный ряд является знакочередующимся, поэтому применим признак Лейбница: $a_n = \frac{1}{n}$, очевидно $a_n > a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится. Ряд же из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является гармоническим и расходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ условно сходится.

Пример 1.12. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$.

Решение. Данный ряд знакочередующийся, применим признак Лейбница. Представим модули членов ряда в виде $a_n = \frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$. Отсюда имеем $a_n = \frac{1}{n+\frac{1}{n}} > a_{n+1} = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n+1}}$, так как $n + \frac{1}{n} < n + 1 + \frac{1}{n+1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$. По признаку Лейбница данный знакочередующийся ряд сходится. Ряд модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$ расходится по интегральному признаку, так как $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^{+\infty} = \infty$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ условно сходится.

Пример 1.13. Исследовать сходимость ряда $1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{2^5}+\ldots$.

Решение. Данный ряд является знакопеременным, используем признак сходимости знакопеременных рядов. Ряд из модулей его членов $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^5}+\ldots$ является сходящимся геометрическим рядом, следовательно, исходный ряд является сходящимся, причем абсолютно.

1.10. Исследовать сходимость знакопеременных рядов и определить характер сходимости (абсолютная, условная):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{3n-1}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+n+1}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n^{10}}{e^n}$;

8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{n!}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}\right)$;

11) $\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10^2}-\dfrac{13}{10^3}+\dfrac{19}{10^4}+\dfrac{25}{10^5}-\dfrac{31}{10^6}+\ldots$;

12) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}-\dfrac{6}{7}+\ldots$.

1.2. Степенные ряды

1.2.1. Основные понятия

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$,

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – действительные числа, называется *степенным рядом*.

Множество значений переменной x, при которых степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, называется *областью его сходимости*. Очевидно, что степенной ряд сходится при $x = 0$. В области сходимости сумма степенного ряда является функцией x, что записывается как $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ или $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на всей числовой прямой, то пишут $R = \infty$, если он сходится только при $x = 0$, то пишут $R = 0$. Внутри интервала сходимости степенной ряд абсолютно сходится. На концах интервала сходимости, в точках $x = -R$ и $x = R$, степенной ряд может сходиться или расходиться, поэтому в этих точках необходимо отдельно исследовать сходимость ряда. Радиус сходимости степенного ряда может быть найден одним из следующих способов.

1. Если коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ряда отличны от нуля, т.е. ряд содержит все целые положительные степени x, то $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ при условии, что этот предел (конечный или бесконечный) существует.

2. Если ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k \cdot n}$, где k натуральнее число и $k \geq 2$, то $R = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$.

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю, то $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, здесь рассматриваются значения a_n отличные от нуля.

4. Во всех случаях радиус сходимости может быть найден непосредственным применением признака Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин исходного ряда, т.е. из неравенств $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1$, где $u_n(x)$ общий член степенного ряда.

Пример 1.14. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда. Здесь $a_n=\dfrac{1}{n}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ и $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$. Интервалом сходимости является интервал $(-1,1)$. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала. При $x=-1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x=1$ получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится. Следовательно, областью сходимости является промежуток $[-1,1)$.

Пример 1.15. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n=x+2!\cdot x^2+3!\cdot x^3+\ldots$.

Решение. Найдем радиус сходимости этого ряда. Здесь $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$ и $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. Значит, данный степенной ряд сходится только при $x=0$ и его область сходимости состоит из единственной точки $x=0$.

Пример 1.16. Исследовать сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда. Здесь $a_n=\dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$ и $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Следовательно, данный ряд сходится на всей числовой оси.

Пример 1.17. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{3n}}{2n-1}=\frac{2x^3}{1}+\frac{4x^6}{3}+\frac{8x^9}{5}+\ldots.$$

Решение. Данный ряд содержит не все степени x, поэтому для определения радиуса сходимости воспользуемся формулой $R=\sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$. Для данного ряда $k=3$, $a_n=\dfrac{2^n}{2n-1}$, $a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{2n+1}$. Отсюда получаем $R=\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^n(2n+1)}{(2n-1)2^{n+1}}\right|}=\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{(2n-1)2}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ и интервал сходимости $\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Исследуем сходимость данного степенного ряда на концах этого интервала. При $x=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(-1/\sqrt[3]{2})^{3n}}{(2n-1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{3n}}{2n-1}$, который является знакочередующимся рядом и сходится по признаку Лейбница. При $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(1/\sqrt[3]{2})^{3n}}{(2n-1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ с неотрицательными членами, который расходится по предельному признаку сравнения. Таким образом, данный степенной ряд сходится на промежутке $[-1/\sqrt[3]{2},1/\sqrt[3]{2})$.

Пример 1.18. Исследовать сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n\cdot x^n$.

Решение. Для данного ряда $a_n=\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$. Для определения радиуса сходимости воспользуемся формулой $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Получаем $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}}=2$ и интервал сходимости $(-2,2)$. При $x=-2$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$, а при $x=2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$, у которых абсолютные величины их членов не сходятся к нулю, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1)\frac{n}{(2n+1)}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда и оба ряда расходятся. Областью сходимости исследуемого степенного ряда является интервал $(-2,2)$.

Пример 1.19. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n(n-1)/2}}{n!}$.

Решение. Применим признак Даламбера, полагая $u_n(x)=\dfrac{x^{n(n-1)/2}}{n!}$, $u_{n+1}(x)=\dfrac{x^{(n+1)n/2}}{(n+1)!}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n}{n+1}=\begin{cases}0, & \textit{при} \quad |x|\le 1,\\ \infty, & \textit{при} \quad |x|>1.\end{cases}$ Отсюда по признаку Даламбера следует, что при $|x|\le 1$ данный степенной ряд сходится, а при $|x|>1$ расходится. Следовательно, область сходимости этого ряда отрезок $[-1,1]$.

1.11. Найти области сходимости следующих степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n(n+1)}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{5^n\sqrt{n+1}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n-1)!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n+3^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(4n-3)8^n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{5^n\sqrt{n+1}}$.

1.2.2. Разложение функции в степенной ряд

Функция $f(x)$ *разлагается в степенной ряд на интервале* $(-R,R)$, если она является суммой степенного ряда $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$, интервал сходимости которого $(-R,R)$. Коэффициенты этого разложения определяются соотношениями $a_0=f(0)$, $a_1=f'(0)/1!$, $a_2=f''(0)/2!$, …, $a_n=f^{(n)}(0)/n!$, …

Если функция $f(x)$ дифференцируема бесконечное число раз, то ряд

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

называется *рядом Маклорена для функции* $f(x)$. На интервале сходимости $(-R,R)$ ряд Маклорена имеет своей суммой функцию $f(x)$ тогда и только тогда, когда при любых $x\in(-R,R)$ выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(qx)}{(n+1)!}x^{n+1}=0$.

Здесь $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(qx)}{(n+1)!}x^{n+1}$ – остаточный член формулы Маклорена, $0<q<1$.

Таким образом, разложение бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в степенной ряд Маклорена заключается в построении для нее ряда Маклорена, определении его радиуса сходимости R и проверки необходимого и достаточного условия сходимости ряда к этой функции.

При разложении функций в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty;$$

логарифмический ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots, \qquad -1 < x \le 1;$$

биномиальный ряд

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots,$$
$$-1 < x < 1.$$

Рассматриваются также разложения функции в ряд по степеням $(x-a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots.$$

Такое разложение называется степенным *рядом Тейлора для функции* $f(x)$ на интервале его сходимости $(a-R, a+R)$. Разложение в степенной ряд Тейлора сводится к разложению в степенной ряд Маклорена заменой переменной $x-a=t$.

Пример 1.20. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=2^x$.

Решение. Определим значения функции 2^x и ее производных в точке $x=0$: $f(0)=2^0=1$, $f'(0)=2^0\ln 2=\ln 2$, …, $f^{(n)}(0)=2^0(\ln 2)^n=\ln^n 2$. Отсюда ряд Маклорена для функции $f(x)=2^x$ имеет вид $1+\frac{\ln 2}{1!}x+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+\frac{\ln^3 2}{3!}x^3+\ldots+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+\ldots$. Определим его радиус сходимости: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln^n 2)/n!}{(\ln^{n+1} 2)/(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\ln 2}=\infty$. Таким образом, ряд Маклорена сходится на всей числовой оси. Покажем, что его сумма равна 2^x. Остаточный член формулы Маклорена для функции 2^x имеет вид $R_n(x) = \dfrac{2^{qx} \ln^{n+1} 2}{(n+1)!} x^{n+1}$, где $0 < q < 1$. Пусть x некоторое фиксированное число. Из сходимости ряда Маклорена следует, что предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^n 2}{n!} x^n = 0$, отсюда и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^{n+1} 2}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{qx} \ln^{n+1} 2}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$. Выполнено необходимое и достаточное условие сходимости степенного ряда Маклорена к функции 2^x для любых значений x. Таким образом, на всей числовой оси функция $f(x) = 2^x$ разлагается в степенной ряд $2^x = 1 + \dfrac{\ln 2}{1!} x + \dfrac{\ln^2 2}{2!} x^2 + \dfrac{\ln^3 2}{3!} x^3 + \ldots + \dfrac{\ln^n 2}{n!} x^n + \ldots$.

Это разложение можно получить проще, учитывая, что $2^x = e^{x \ln 2}$ и используя разложение $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$, $-\infty < x < +\infty$. Заменив в этом разложении переменную x на $x \ln 2$, получаем

$$2^x = e^{x \ln 2} = 1 + \frac{\ln 2}{1!} x + \frac{\ln^2 2}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 2}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\ln^n 2}{n!} x^n + \ldots,$$

которое справедливо при $-\infty < x < +\infty$.

Пример 1.21. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \cos 2x$.

Решение. Используем разложение в стенной ряд Маклорена функции $\cos t$, приняв в нем $t = 2x$. Получаем

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2(n-1)} x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \ldots.$$

Полученный ряд сходится на всей числовой оси.

Пример 1.22. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. Учитывая, что $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ и полученное в предыдущем примере разложение функции $\cos 2x$, имеем

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}[1 + (1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2(n-1)} x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \ldots)].$$

Окончательно получаем разложение в ряд Маклорена функции $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-3} x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \ldots,$$

которое справедливо при $-\infty < x < +\infty$.

Пример 1.23. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^{-x^2}$.

Решение. Используя разложение в степенной ряд функции e^x, заменив в нем x на $-x^2$, получим разложение функции e^{-x^2} в степенной ряд

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots, \qquad -\infty<x<+\infty.$$

Пример 1.24. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение. Представим функцию $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ в виде $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$. Разложение в степенной ряд функции $\ln(1+x)$ известно:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots, \qquad -1<x\le 1.$$

Заменив в этом разложении x на $-x$, получим разложение в степенной ряд функции $\ln(1-x)$, а именно

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}+\ldots, \qquad -1\le x<1.$$

Вычтя из разложения функции $\ln(1+x)$ разложение функции $\ln(1-x)$, получаем

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right),\ -1<x<1.$$

Пример 1.25. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Представим функцию в виде $f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Используя разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$, для $m=-\dfrac{1}{2}$, получаем искомое разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\ldots, \quad -1<x<1.$$

Пример 1.26. Разложить по степеням $(x-1)$ функцию $f(x)=\ln x$.

Решение. Введем новую переменную $t=x-1$. Тогда $x=1+t$ и $f(t+1)=\ln(1+t)$. Воспользуемся известным разложением в степенной ряд функции $\ln(1+t)$:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} + \ldots ,$$

область сходимости которого $-1 < t \le 1$. Заменив в этом разложении t на $x-1$, получаем разложение в степенной ряд по степеням $(x-1)$ функции $\ln x$:

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \ldots .$$

Из условий $x = 1+t$ и $-1 < t \le 1$ получаем область сходимости этого ряда $0 < x \le 2$.

1.12. Разложить в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости следующих функций:

1) $f(x) = 3^x$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$;
3) $x^2 e^{-2x}$;
4) $f(x) = \sin^2 x$;
5) $f(x) = \sin x^2$;
6) $f(x) = x^3 \cos x$;
7) $f(x) = \ln(1-x^2)$;
8) $f(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$;
9) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$;
10) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$;
11) $f(x) = \sqrt[3]{27+x}$;
12) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;
13) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;
14) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$;
15) $f(x) = \dfrac{7-2x}{x^2-7x+12}$;
16) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;
17) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \ne 0$.

1.13. Разложить в ряд Тейлора, по степеням $(x-a)$, и найти интервалы сходимости для следующих функций:

1) $f(x) = e^{\frac{x}{a}}$;
2) $f(x) = e^x$, $a = 1$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 2$;
5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = -1$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$;

7) $f(x) = \sin 3x$, $a = -\frac{\pi}{3}$; 8) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, $a = \frac{\pi}{2}$.

1.2.3. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Если на интервале $(-R, R)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$, то она дифференцируема на этом интервале и ее производная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием этого ряда, т.е.

$$f'(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots)' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots .$$

Ряд, полученный почленным дифференцированием исходного ряда, имеет тот же интервал сходимости $(-R, R)$.

Если на интервале $(-R, R)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$, то она интегрируема на этом интервале и интеграл от нее может быть найден почленным интегрированием этого ряда, т.е. если a, $b \in (-R, R)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots)dx = \int_a^b a_0dx + \int_a^b a_1xdx + \ldots + \int_a^b a_nx^ndx + \ldots .$$

Ряд, полученный почленным интегрированием исходного ряда, имеет тот же интервал сходимости $(-R, R)$. В частности, при $x \in (-R, R)$ имеет место

$$\int_0^x f(t)dt = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Приведенные свойства степенных рядов позволяет находить разложения функций в степенные ряды и суммы степенных рядов получаемых почленным дифференцированием или интегрированием рядов с известными суммами.

Пример 1.27. Разложить в степенной ряд функцию $arctg\, x$.

Решение. Известно, что $arctg\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Подынтегральная функция $\frac{1}{1+x^2}$ на интервале $(-1, 1)$ разлагается в степенной ряд $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ (см. задачу 1.12 пункт 16). Отсюда, используя почленное интегрирование степенного ряда, получаем разложение в степенной ряд функции $arctg\, x$:

$$arctg\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

Интервал сходимости этого ряда $(-1, 1)$.

Пример 1.28. Разложить в степенной ряд функцию $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ (интеграл Пуассона).

Решение. В разложении $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ заменив x на $-t^2$, получим разложение в ряд Маклорена функции e^{-t^2}, а именно

$$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\ldots,\quad |t|<\infty.$$

Этот ряд можно почленно интегрировать, отсюда получаем

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}=x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ldots,\quad |x|<\infty.$$

Пример 1.29. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

Решение. Очевидно, что $nx^{n-1}=(x^n)'$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, при $|x|<1$, является сходящимся геометрическим рядом с суммой равной $\frac{1}{1-x}$. Отсюда, дифференцируя левую и правую части равенства $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, получаем $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ для $|x|<1$.

1.14. Разложить в степенной ряд функцию $\arcsin x$.

1.15. Разложить в степенной ряд функцию $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1.16. Разложить в степенной ряд функцию $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$ (интеграл Френеля).

1.17. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ при $x\neq 0$ и $f(0)=1$.

1.18. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1$.

1.19. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$.

1.20. Дифференцируя разложение в ряд Маклорена функции $\sin x$ получить разложение функции $\cos x$.

1.21. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

1.22. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

1.23. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\cdot\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}$.

1.24. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2\cdot\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}$ **.**

1.3. Ряд Фурье

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ *с периодом* $2p$ *, определенной и интегрируемой на промежутке* $[-p\,, p\,]$*, называется ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,,$$

где $a_n=\frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p} f(x)\cos nx dx, \quad n=0,1,2,3,\mathbf{K}, \; b_n=\frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p} f(x)\sin nx dx, \quad n=1,2,3,\mathbf{K}$.

Если ряд Фурье сходится, то его сумма $S(x)$ является периодической функцией периода $2p$. Числа a_n и b_n называются *коэффициентами ряда Фурье.*

Теорема. Пусть функция $f(x)$ *и ее производная* $f^{/}(x)$ *непрерывны на отрезке* $[-p\,, p\,]$ *или же имеют на нем конечное число точек разрыва первого рода. Тогда ряд Фурье функции* $f(x)$ *сходится на всей числовой прямой, причем:*

в точках непрерывности лежащих в интервале $(-p\,, p\,)$ *сумма ряда равна значению функции* $f(x)$ *в этих точках, т.е.* $S(x)=f(x)$*;*

в точках x_0 *разрыва первого рода функции* $f(x)$ *сумма ряда равна* $\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$*;*

на концах отрезка $[-p\,, p\,]$ *сумма ряда равна* $\frac{1}{2}(f(-p\,)+f(p\,))$.

Ряд Фурье с периодом $2l$**.** Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l,l]$, где l - положительное число, удовлетворяет условиям приведенной выше теоремы. Тогда в точках непрерывности функции справедливо разложение в ряд Фурье с периодом $2l$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{np\,x}{l}+b_n\sin\frac{np\,x}{l}),$$

где $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{np\,x}{l}dx,\quad n=0,1,2,3,\mathbf{K},\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{np\,x}{l}dx,\quad n=1,2,3,\mathbf{K}$;

в точках x_0 разрыва функции $f(x)$ сумма ряда $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{np\,x}{l}+b_n\sin\frac{np\,x}{l})$ равна $\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$; а на концах отрезка $[-l,l]$ равна $\frac{1}{2}(f(-l)+f(l))$.

Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Если на отрезке $[-l,l]$ функция $f(x)$ четная, $f(x)=f(-x)$, то все коэффициенты $b_n=0$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{np\,x}{l},$$

если $f(x)$ нечетная функция, $f(-x)=-f(x)$, то все $a_n=0$ и ряд Фурье принимает вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{np\,x}{l}.$$

Пример 1.30. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом $2p$, заданную на интервале $(-p,p)$ как $f(x)=p+x$.

Решение. Определим коэффициенты ряда Фурье.

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}(p+x)dx=2p\quad.$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}(p+x)\cos nxdx=\int_{-p}^{p}\cos nxdx+\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}x\cos nxdx=$$

$$=(\frac{\sin nx}{n}+\frac{x\sin nx}{p\,n}+\frac{\cos nx}{p\,n^2})\Big|_{-p}^{p}=0,\quad n=1,2,3,\mathbf{K}..$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}(p+x)\sin nxdx=\int_{-p}^{p}\sin nxdx+\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}x\sin nxdx=$$

$$=(-\frac{\cos nx}{n}-\frac{x\cos nx}{p\,n}+\frac{\sin nx}{p\,n^2})\Big|_{-p}^{p}=\frac{-2\cos np}{n}=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},\quad n=1,2,3,\mathbf{K}.$$

Следовательно, разложение функции $f(x)=p+x$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=p+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=p+2(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\mathbf{K}).$$

Этот ряд на интервале $(-p, p)$ сходится к самой функции $f(x)$, а в точках $x = \pm p$ его сумма равна $\frac{1}{2}(f(-p) + f(p)) = p$.

Пример 1.31. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & -p \le x < 0, \\ -1, & 0 \le x \le p. \end{cases}$

Решение. Эта функция нечетная, поэтому все $a_n = 0$. Определим коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{p}\int_{-p}^{0}\sin nxdx - \frac{1}{p}\int_{0}^{p}\sin nxdx =$$

$$= -\frac{\cos nx}{p\,n}\Big|_{-p}^{0} + \frac{\cos nx}{p\,n}\Big|_{0}^{p} = -\frac{1}{p\,n}(\cos 0 - \cos np) + \frac{1}{p\,n}(\cos np - \cos 0) =$$

$$= \frac{2}{np}(\cos np - \cos 0) = \frac{2}{np}((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \mathbf{K}.$$

Для четных n коэффициенты b_n равны нулю, а при нечетных n получаем $b_n = -\frac{4}{p\,n}$. Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = -\frac{4}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x = -\frac{4}{p}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \mathbf{K}),$$

который в точках непрерывности из интервала $(-p, p)$ имеет суммой функцию $f(x)$, в точке разрыва $x_0 = 0$ его сумма равна $\frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) = \frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0$, а в точках $x = \pm p$ его сумма равна $\frac{f(-p) + f(p)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$.

1.25. На отрезке $[-p, p]$ разложить в ряд Фурье функции.

1) $f(x) = x$.

2) $f(x) = x^2$.

3) $f(x) = x - p$.

4) $f(x) = 2x + 3$.

5) $f(x) = 2 - 3x$.

6) $f(x) = \begin{cases} 0, & -p \le x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le p. \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} 0, & -p \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le p. \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} -x, & -p \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le p. \end{cases}$

1.26. На отрезке $[-l, l]$ разложить в ряд Фурье функции.

1) $f(x) = x$.

2) $f(x) = |x|$.

3) $f(x)=\begin{cases}1, & -l\le x\le 0,\\ -1, & 0<x\le l.\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}0, & -l\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le l.\end{cases}$

1.4. Вариант теста и контрольной работы по теме «Ряды»

Вариант теста по теме «Ряды»

1. Какая из фраз пропущена в определении «Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется сходящимся, если ………..»

а) последовательность его частичных сумм $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ является неограниченной;

б) последовательность его частичных сумм $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ является ограниченной;

в) последовательность его частичных сумм $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ является сходящейся;

г) общий член ряда сходится к нулю при $n\to\infty$.

2. Вставить пропущенную часть определения «Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется абсолютно сходящимся, если ………..»

3. При каких из приведенных условий числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с неотрицательными членами **расходится**?

а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b\ne 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=q<1$.

4. При каких значениях параметра a обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ сходится?

а) $a<0$; б) $a>1$; в) $0<a<1$; г) $a\ge 1$; д) $a\le 1$.

5. Пусть числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=4$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=1$. Какие из приведенных заключений **верны**?

а) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$ сходится и его сумма равна 2.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2b_n)$ расходится.

в) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2b_n)$ сходится и его сумма равна 6.

г) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 2b_n) = 0$.

д) Ряд $3 - 2 + 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \mathbf{K} + a_n + \mathbf{K}$ сходится и его сумма равна 6.

6. Пусть числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами. Для каждого из заключений, приведенных в левой части таблицы, укажите условия (из правой части) при которых они верны.

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.	1. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,2$
2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.	2. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,2$
3. Оба ряда сходятся или расходятся.	3. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$
4. Нельзя сделать вывод о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.	4. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 3,1$
5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.	5. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0,5$
6. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.	6. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 2,5$

7. Выполнение, каких из приведенных условий влечет **сходимость** ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, где $a_n > 0$?

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0{,}5$; в) $a_n > a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; г) если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

8. Какие из приведенных рядов **условно сходятся**?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

9. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R равный 2. При каких из указанных значений x этот ряд **расходится**?

а) $x=1$; б) $x=-3$; в) $x=-1$; г) $|x|<2$; д) $|x|>2$.

10. Какой из формул определяются коэффициенты a_n разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена?

а) $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$; б) $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$; в) $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n}$; г) $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$; д) $a_n = \frac{f^{n}(0)}{n!}$.

11. Разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена имеет вид

а) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \quad -\infty<x<+\infty$;

б) $\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots, \quad -\infty<x<+\infty$;

в) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}+\ldots, \quad -\infty<x<+\infty$;

г) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots, \quad -1<x\le 1$;

д) $1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots, -1<x<1.$

Вариант контрольной работы по теме «Ряды»

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+3}{n^3+1}$.

2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\ln^3 n}$.

5. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}x^n$, исследовать сходимость ряда на границах интервала сходимости.

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную в интервале $(-\pi,\pi)$ уравнением $f(x)=|x|$.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

2.1. Основные понятия

Обыкновенным дифференциальным уравнением n*-го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где $y = y(x)$ – искомая функция, x – независимая переменная. *Решением* этого уравнения называется любая n раз дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке вместо неизвестной функции обращает его в тождество. График решения $y=\varphi(x)$ называется *интегральной кривой*. Если решение задано в неявном виде $\Phi(x, y)=0$, то оно называется *интегралом* этого уравнения. *Порядок дифференциального уравнения* определяется наибольшим порядком производной неизвестной функции $y = y(x)$ входящим в это уравнение. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка в области D называется функция $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, которая содержит n независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и обладает следующими свойствами:

1) при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ эта функция является решением этого уравнения;

2) для любого *начального условия* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$, … , $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ из области D существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0, \ldots, C_n = C_n^0$, при которых решение $y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$ удовлетворяет этому условию.

Если общее решение представлено в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, то это выражение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения n-го порядка.

Всякое решение $y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1 = C_1^0, \ldots, C_n = C_n^0$, называется *частным решением* обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка. Если частное решение представлено в неявном виде $\Phi(y, x, C_1^0, C_2^0, \mathbf{K}, C_n^0) = 0$, то это выражение называется частным интегралом этого уравнения.

Задачей Коши называется нахождение частного решения обыкновенного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Пример 2.1. Показать, что функция $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$ является общим решением уравнения $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1/6$, $y'(0) = 1/6$.

Решение. Покажем, что функция $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$ при любых C_1 и C_2 удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Найдем первую и вторую производные этой функции:

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(-15\sin 3x - 3\cos 3x),$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(-45\cos 3x + 9\sin 3x).$$

Подставив y, y' и y'' в левую часть дифференциального уравнения и приведя подобные получаем

$$y'' - 5y' + 6y = 4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(-45\cos 3x + 9\sin 3x) - 5[2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} +$$

$$+\frac{1}{6}(-15\sin 3x - 3\cos 3x)] + 6[C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)] = 13\sin 3x,$$

что совпадает с правой частью дифференциального уравнения. Таким образом, при любых C_1 и C_2 функция $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$ удовлетворяет данному дифференциальному уравнению.

Покажем, что при любых начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ постоянные C_1 и C_2 определяются единственным образом. Для нахождения значений C_1 и C_2 получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$y(x_0) = C_1 e^{2x_0} + C_2 e^{3x_0} + \frac{1}{6}(5\cos 3x_0 - \sin 3x_0) = y_0,$$

$$y'(x_0) = 2C_1 e^{2x_0} + 3C_2 e^{3x_0} + \frac{1}{6}(-15\sin 3x_0 - 3\cos 3x_0) = y_0'.$$

Вычислим определитель матрицы этой системы:

$$\begin{vmatrix} e^{2x_0} & e^{3x_0} \\ 2e^{2x_0} & 3e^{3x_0} \end{vmatrix} = 3e^{5x_0} - 2e^{5x_0} = e^{5x_0}.$$

Он не равен нулю при любых x_0, следовательно, эта система уравнений имеет единственное решение C_1^0, C_2^0 при любых начальных условиях.

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=1/6$ и $y'(0)=1/6$, подставив $x=0$ в выражения $y(x)$ и $y'(x)$, получаем систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 + C_2 = -\frac{4}{6},$$
$$2C_1 + 3C_2 = \frac{4}{6}.$$

Решая эту систему, например, методом Гаусса, получаем $C_1 = -\frac{8}{3}, C_2 = 2$. Подставив найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получаем искомое частное решение

$$y = -\frac{8}{3}e^{2x} + 2e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x),$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям.

2.1. Определить порядок следующих дифференциальных уравнений:

1) $xy'' - y'\ln(y'/x) = 0$; 2) $2xy'''y^2 = y^4 - 1$;

3) $x(y')^2 - x^2y + 2x = 0$; 4) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$.

2.2. Проверить подстановкой, что указанные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

1) $y = \dfrac{2x}{1-3x^2}$, $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$.

2) $y = xe^{-1/x}$, $x^3y'' - xy' + y = 0$.

3) $y = e^x \cos x$, $y^{(4)} + 4y = 0$.

4) $y = x - \ln x - 1$, $ydx - xdy + \ln x\, dx = 0$.

5) $y = x\arcsin x$, $xy' - y = xtg(y/x)$.

2.3. Проверить, что указанные функции являются общими решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

1) $y = Ce^{-1/x^2}$, $y'x^3 = 2y$.

2) $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$, $y' + y\cos x = \sin 2x$.

3) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$, $y'' + 3y' + 2y = 0$.

4) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x$, $y'' - 4y = 8x^3$.

2.4. Из приведенного общего решения получить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (задача Коши).

1) $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}, \quad y(0) = 0$.

2) $y = t^3(\ln t - 1) + Ct^2, \quad y(1) = 2$.

3) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad y(p/4) = 2,\ y'(p/4) = 1$.

4) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$f_1(x) j_1(y) dx + f_2(x) j_2(y) dy = 0 \quad \text{или} \quad f_1(x) j_1(y) + f_2(x) j_2(y) y' = 0$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*. Делением на $j_1(y) f_2(x) \neq 0$ оно приводится к виду с разделенными переменными

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{j_2(y)}{j_1(y)} dy = 0.$$

Почленное интегрирование этого уравнения приводит к соотношению

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{j_2(y)}{j_1(y)} dy = C,$$

которое определяет общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x(1 + 2y) dx + (1 + x^2) dy = 0.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Принимая $1 + 2y \neq 0$, разделим это уравнение на $(1 + 2y)(1 + x^2)$. Получим уравнение с разделенными переменными $\dfrac{xdx}{1 + x^2} + \dfrac{dy}{1 + 2y} = 0$. Почленно интегрируя это уравнение, имеем $\displaystyle\int \frac{xdx}{1 + x^2} + \int \frac{dy}{1 + 2y} = \ln C_1$. Отсюда получим общий интеграл $\dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \dfrac{1}{2}\ln|1 + 2y| = \ln C_1$. С целью упрощения нахождения общего решения в качестве произвольной постоянной взята величина $\ln C_1, C_1 > 0$. Разрешим полученное уравнение относительно y:

$$\ln|1 + 2y| = \ln\frac{C_1^2}{1 + x^2} \Rightarrow |1 + 2y| = \frac{C_1^2}{1 + x^2} \Rightarrow 1 + 2y = \frac{\pm C_1^2}{1 + x^2} \Rightarrow y = \frac{C}{2(1 + x^2)} - \frac{1}{2},$$

где $C=\pm C_1^2$. Получили искомое общее решение $y=\dfrac{C}{2(1+x^2)}-\dfrac{1}{2}$.

Пример 2.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2y'+y^2=0$ и частое решение, удовлетворяющее начальному условию $y(-1)=1$.

Решение. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные в этом уравнении, учитывая, что $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и $x\neq 0, y\neq 0$, получаем $\dfrac{dy}{y^2}+\dfrac{dx}{x^2}=0$. Почленно интегрируя это уравнение, получаем общий интеграл $-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=C$. Отсюда находим общее решение $y=\dfrac{x}{Cx-1}$. Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y(-1)=1$, определим из этого условия значение постоянной C: $y(-1)=\dfrac{-1}{C(-1)-1}=1\Rightarrow C=0$. Подставляя найденное значение $C=0$ в общее решение, получаем искомое частное решение $y=-x$.

Пример 2.4. Найти функцию спроса $q(p)$ по известной точечной эластичности спроса q по цене p, если $E_p(q)=\dfrac{p}{p-20}$, $0<p<20$, и значению спроса $q_0=4$ при цене $p_0=18$.

Решение. Учитывая, что $E_p(q)=\dfrac{q'(p)}{q(p)}p$, получаем дифференциальное уравнение $\dfrac{q'(p)}{q(p)}p=\dfrac{p}{p-20}$ для нахождения функции спроса. Разделив переменные в этом уравнении, получаем $\dfrac{dq}{q}=\dfrac{dp}{p-20}$. Отсюда, взяв интегралы от обеих частей, находим общий интеграл $\ln|q|=\ln|q-20|+\ln C$, из которого получаем $q=C(p-20), 0<p<20$. Из начального условия $q(18)=4$ определим значение постоянной C: $q(18)=C(18-20)=4$, отсюда $C=-2$. Подставив это значение постоянной в общее решение, находим искомую функцию спроса $q=2(20-p),\ 0<p<20$.

Пример 2.5. Определить изменение во времени интенсивности $y(t)$ выпуска продукции, если скорость $y'(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$ изменения интенсивности выпуска прямо пропорциональна доходу от реализации, равному $p\cdot y$, где

p – цена единицы продукции определяется как $p = a - by$, постоянные параметры a и b положительные.

Решение. По условиям задачи, для определения интенсивности выпуска $y(t)$ имеем дифференциальное уравнение $y' = ky(a - by)$, где k – коэффициент пропорциональности. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получаем $\frac{dy}{y(a-by)} = kdt$. Проинтегрируем обе части этого уравнения:

$$\int \frac{dy}{y(a-by)} = \int \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} + \frac{b}{a-by}\right)dy = \frac{1}{a}(\ln|y| - \ln|a-by|) = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right|; \quad \int kdt = kt + C_1 .$$

Приравняв полученные интегралы, получим общий интеграл $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right| = kt + C_1$. Найдем общее решение:

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right| = kt + C_1 \Leftrightarrow \left|\frac{y}{a-ky}\right| = e^{akt} \cdot e^{aC_1} \Leftrightarrow \frac{y}{a-by} = e^{akt} \cdot C,$$

где $C = \pm e^{aC_1}$. Отсюда получаем $y = \frac{aCe^{akt}}{1+bCe^{akt}}$. Полученная функция представляет уравнение логистической кривой используемой в различных экономических исследованиях.

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (решение задачи Коши), если задано начальное условие.

2.5. $xydx + (x+1)dy = 0$.

2.6. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$.

2.7. $xyy' = 1 - x^2$.

2.8. $xy' - y = y^3$.

2.9. $(1+x^2)y' + 1 + y^2 = 0$.

2.10. $\ln\cos y\,dx + x\,tg\,y\,dy = 0$.

2.11. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, \quad y(1) = 0$.

2.12. $y' = 2\sqrt{y}\ln x, \quad y(e) = 1$.

2.13. $y' = 2^{x-y}, \quad y(-3) = -5$.

2.14. $\frac{y}{y'} = \ln y, \quad y(2) = 1$.

2.15. $y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y), \quad y(0) = p/4$.

2.16. Найти функцию спроса $q = q(p)$ по известной точечной эластичности спроса по цене, если $E_p(q) = \frac{q-100}{q}$, $0 < q < 100$, и значению спроса $q_0 = 90$ при цене $p_0 = 10$.

2.17. Найти функцию, имеющую постоянную точечную эластичность, равную a.

2.18. Найти функцию, имеющую постоянный мгновенный темп прироста, равный r.

2.19. Найти функцию издержек $C(q)$ по известному мгновенному темпу прироста $r = \dfrac{2+0,02q}{3+2q+0,01q^2}$ и начальному условию $C(0)=6$.

2.20. Изменение во времени числа $L(t)$ потребителей некоторого товара описывается моделью Реденура:

$$\frac{dL}{dt} = aL\left(1-\frac{L}{L_m}\right),$$

где L_m – максимально возможное число потребителей товара, a – положительный коэффициент пропорциональности. Найти функцию изменения числа потребителей, если к начальному моменту времени $t=0$ число потребителей приобретших данный товар равно $0,1\cdot L_m$.

2.21. Для функции $q(t)$, описывающей объем производства в зависимости от времени t, известны мгновенный темп прироста, равный $k\cdot(q_m - q)$, где q_m – максимально возможный объем производства, и объем производства q_0 в момент времени $t=0$. Найти функцию объема производства.

2.3. Однородные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией* m*-го порядка*, если $f(l\,x, l\,y) = l^m f(x,y)$. Дифференциальное уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового порядка m. Однородное дифференциальное уравнение приводится к виду $y' = j\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

где $j\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\dfrac{P(x\cdot 1, x\cdot(y/x))}{Q(x\cdot 1, x\cdot(y/x))} = -\dfrac{x^m P(1,y/x)}{x^m Q(1,y/x)} = -\dfrac{P(1,y/x)}{Q(1,y/x)}$, которое также является однородным. С помощью подстановки $y = t\cdot x$ или $t = \dfrac{y}{x}$ однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными $t'x = j(t) - t$ относительно новой неизвестной функции $t(x)$. Найдя общее решение или общий интеграл этого уравнения, заменив в нем t на $\dfrac{y}{x}$, получаем общее решение или общий интеграл исходного однородного уравнения.

Пример 2.6. Найти общий интеграл уравнения $(x^2+2xy)dx + xydy = 0$.

Решение. Это однородное дифференциальное уравнение, т.к. $P(x,y) = x^2 + 2xy$ и $Q(x,y) = xy$ – однородные функции второго порядка. Введем подстановку $y = tx$, отсюда $dy = xdt + tdx$. С использованием этой подстановки уравнение примет вид

$$(x^2 + 2x^2 t)dx + tx^2(xdt + tdx) = 0 .$$

Проведя группировку слагаемых с dx и dt, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$x^2(1 + 2t + t^2)dx + tx^3 dt = 0 .$$

Разделив переменные и проинтегрировав уравнение, получаем общий интеграл относительно новой неизвестной функции $t(x)$

$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{(1+t)^2} = 0, \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{tdt}{(1+t)^2} = C, \quad \ln|x| + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} = C .$$

Приняв в этом интеграле $t = \dfrac{y}{x}$, получаем искомый общий интеграл

$$\ln|x| + \ln|y/x + 1| + \frac{1}{y/x + 1} = C$$

или после преобразования $\ln|y + x| + \dfrac{x}{y + x} = C$.

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (решение задачи Коши), если задано начальное условие.

2.22. $yy' = 2y - x$.

2.23. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

2.24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

2.25. $y' = 4 + \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = 2.$

2.26. $xy' - y = xtg(y/x), \quad y(1) = p/2.$

2.27. $xy' = xe^{y/x} + y, \quad y(1) = 0.$

2.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) .$$

Если $q(x) \equiv 0$, то оно называется *линейным однородным*, в противном случае *линейным неоднородным*.

Общее решение линейного однородного уравнения

$$y' + p(x)y = 0$$

получается разделением переменных:

$$dy/y = -p(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx, \quad y = Ce^{-\int p(x)dx} .$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y' + p(x)y = q(x)$$

можно получить методом *вариации произвольной постоянной* (метод Лагранжа) или *методом подстановки* (метод Бернулли).

Метод вариации произвольной постоянной. Общее решение неоднородного уравнения ищется в виде $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, где $C(x)$ – неизвестная функция. Для определения $C(x)$ это решение подставляется в исходное неоднородное уравнение. Учитывая, что $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))$, получаем

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Отсюда для определения $C(x)$ получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, общее решение которого $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$, где C – произвольная постоянная. Подставив найденную функцию $C(x)$ в выражение для y, получаем общее решение линейного неоднородного уравнения

$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]e^{-\int p(x)dx}.$$

Метод подстановки. Решение неоднородного линейного уравнения ищется как произведение двух неизвестных функций: $y = u(x)\cdot v(x)$. С помощью этой подстановки исходное уравнение приводится к виду $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u[v' + p(x)v] = q(x)$. Одна из функций $u(x)$ или $v(x)$ может быть выбрана произвольно, так как исходному уравнению должно удовлетворять только их произведение $u\cdot v$. Поэтому $v(x)$ выбираем как частное решение уравнения $v' + p(x)v = 0$, а именно, $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$. При таком выборе $v(x)$ преобразованное уравнение приобретает вид $u'v = q(x)$. Подставив в это уравнение $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ и разделив переменные, получаем $du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$. Отсюда $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$. Перемножив полученные функции $u(x)$ и $v(x)$, получаем общее решение исходного линейного неоднородного уравнения

$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]e^{-\int p(x)dx}.$$

Пример 2.7. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + y/x = x$, удовлетворяющее начальному условию $y(3) = 2$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка с $p(x) = \dfrac{1}{x}$ и $q(x) = x$. Для нахождения решения воспользуемся формулой его общего решения: $y=\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]e^{-\int p(x)dx}$. Найдем интегралы, входящие в эту формулу:

$$\int p(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x\,;\ \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\int xe^{\ln x}dx=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}.$$

Подставив их в формулу общего решения, получаем

$$y=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)e^{-\ln x}=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{3}+\frac{C}{x}.$$

Для определения постоянной C из начального условия $y(3)=2$ получаем уравнение $\frac{3^2}{3}+\frac{C}{3}=2$. Отсюда находим $C=-3$ и искомое частное решение $y=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x}$.

Пример 2.8. Проинтегрировать уравнение $y'\cos^2 x+y=tg\,x$ при начальном условии $y(0)=0$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным. Решим его методом подстановки Бернулли. Полагая $y=u\cdot v$, получаем $(u'v+uv')\cos^2 x+uv=tg\,x$ или $u'v\cos^2 x+u(v'\cos^2 x+v)=tg\,x$. Функции $v(x)$ найдем из условия $v'\cos^2 x+v=0$, отсюда $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{\cos^2 x}$. Интегрируя это уравнение, имеем $v(x)=e^{-tg\,x}$ (постоянная интегрирования не вводится, так как достаточно найти любое частное решение этого уравнения). Учитывая, что $v'\cos^2 x+v=0$ и $v=e^{-tg\,x}$, для определения $u(x)$ получаем уравнение $u'e^{-tg\,x}\cos^2 x=tg\,x$. Разделив переменные в этом уравнении, имеем $du=\frac{e^{tg\,x}tg\,x}{\cos^2 x}dx$. Отсюда $u=\int\frac{e^{tg\,x}tg\,x}{\cos^2 x}dx+C$. Найдем интеграл $\int\frac{e^{tg\,x}tg\,x}{\cos^2 x}dx$. Введем новую переменную интегрирования $t=tg\,x,\ dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$. Используя метод интегрирования по частям, получаем

$$\int\frac{e^{tg\,x}tg\,x}{\cos^2 x}dx=\int t\cdot e^t dt=t\cdot e^t-e^t\Big|_{t=tg\,x}=e^{tg\,x}(tg\,x-1).$$

Следовательно, $u=e^{tg\,x}(tg\,x-1)+C$, а общее решение исходного уравнения равно

$$y=[e^{tg\,x}(tg\,x-1)+C]\cdot e^{-tg\,x}=tg\,x-1+Ce^{-tg\,x}.$$

Из начального условия $y(0)=0$ для определения постоянной C получаем уравнение $-1+C=0$. Отсюда $C=1$ и $y=tg\,x-1+e^{-tg\,x}$ искомое частное решение.

Пример 2.9. Модель установления рыночной цены. Согласно модели Самуэльсона скорость $\frac{dp}{dt}$ изменения цены $p(t)$ на рынке одного товара пропорциональна избыточному спросу $D(p)-S(p)$ на этот товар с коэффициентом пропорциональности $k>0$, т.е. $\frac{dp}{dt}=k(D(p)-S(p))$. В предположении линейности спроса $D(p)=a-b\cdot p$ и предложения $S(p)=a+b\cdot p$ по цене p, где a,b,a,b – заданные положительные числа, скорость изменения цены описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dp}{dt}+k(b+b)p=k(a-a).$$

Найти функцию $p(t)$ описывающую изменение цены во времени при условии, что в момент времени $t=0$ цена товара равнялась p_0.

Решение. Найдем решение этого уравнения методом вариации произвольной постоянной. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $\frac{dp}{dt}+k(b+b)p=0$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dp}{p}+k(b+b)dt=0$. Проинтегрировав это уравнение, находим его общее решение

$$p(t)=Ce^{-k(b+b)t}.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $p(t)=C(t)e^{-k(b+b)t}$, где $C(t)$ неизвестная функция. Для ее определения, подставив $p(t)=C(t)e^{-k(b+b)t}$ в исходное неоднородное уравнение, получаем уравнение $C'(t)=k(a-a)e^{k(b+b)t}$, интегрируя которое находим

$$C(t)=\frac{a-a}{b+b}\cdot e^{k(b+b)t}+C.$$

Отсюда общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$p(t)=\left(\frac{a-a}{b+b}\cdot e^{k(b+b)t}+C\right)e^{-k(b+b)t}=\frac{a-a}{b+b}+Ce^{-k(b+b)t}.$$

Из начального условия $p(0)=p_0$ находим значение произвольной постоянной $C=p_0-\frac{a-a}{b+b}$. Следовательно, искомым частным решением неоднородного уравнения будет функция

$$p(t) = \frac{a - a}{b + b} + (p_0 - \frac{a - a}{b + b})e^{-k(b+b)t}.$$

Эта функция описывает изменение цены товара во времени. В силу $b > 0$ и $b > 0$ при неограниченном возрастании времени t цена товара стремится к равновесной цене равной $\frac{a - a}{b + b}$, определяемой условием $D(p) = S(p)$.

Решить дифференциальные уравнения:

2.28. $y' - \frac{3y}{x} = x$.

2.29. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

2.30. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

2.31. $(1 + x^2)y' + y = arctg\, x$.

2.32. $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x,\ y(0) = 0$.

2.33. $y' \sin x - y \cos x = 1,\ y(p\ /\ 2) = 0$.

2.34. Простейшая модель движения основного капитала $K(t)$ имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = -mK + rI.$$

Здесь m – коэффициент выбытия основного капитала, I – скорость поступления инвестиций, r – коэффициент перевода инвестиций в основной капитал. Найти функцию $K(t)$.

2.35. Функции спроса D и предложения S на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 30 - p(t) - 4\frac{dp}{dt}$, $S(p) = 20 + p(t) + \frac{dp}{dt}$. Из условия равновесия спроса и предложения найти зависимость равновесной цены $p(t)$ от времени t, при $p(0) = 10$.

2.36. Динамика сбережений $S(t)$ при их накоплении с непрерывным начислением процентов с постоянной ставкой процента r и с учетом его потребления с постоянной скоростью $c(t) = c_0$ описывается дифференциальным уравнением $S'(t) = rS(t) - c_0$. Найти функцию изменения сбережений во времени, если объем сбережений в начальный момент времени $t = 0$ составлял величину S_0.

2.37. Простейшая модель экономического роста Харрода-Домара $y' - by = -bc_0e^{r \cdot t}$ описывает изменение во времени дохода y в зависимости от потребления $c(t) = c_0e^{r \cdot t}$. Найти функцию $y(t)$ при условии $y(0) = y_0$.

2.38. Найти функцию спроса $q = q(p)$ по известной точечной эластичности спроса по цене p, если $E_p(q) = a + \frac{b}{q},\ (a, b > 0,\ p > 1)$.

2.5. Уравнение Бернулли

Нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Введением новой неизвестной функции $z = y^{1-m}$ оно сводится к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{1-m} z' + p(x)z = q(x).$$

Найдя его общее решение $z(x,C)$, решение уравнения Бернулли находится как $y(x) = (z(x,C))^{\frac{1}{1-m}}$. При интегрировании уравнения Бернулли его не нужно преобразовывать в линейное, а сразу для нахождения его решения использовать метод вариации произвольной постоянной или метод подстановки Бернулли.

Пример 2.10. Проинтегрировать уравнение $y' + y/x = x^2 y^4$.

Решение. Это уравнение Бернулли с $p(x) = 1/x$ и $q(x) = x^2$. Общее решение найдем методом вариации постоянной. Соответствующее линейное однородное уравнение имеет вид $y' + \frac{y}{x} = 0$. Его общее решение $y = \frac{C}{x}$. Решение исходного уравнения Бернулли ищем в виде $y = \frac{C(x)}{x}$. Для определения неизвестной функции $C(x)$, подставив y и $y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$ в исходное уравнение, получаем $\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^2 \frac{C^4(x)}{x^4}$ или $C'(x) = \frac{C^4(x)}{x}$. Интегрируя это уравнение, имеем $-\frac{1}{3C^3(x)} = \ln x - \ln C_0$. Отсюда $C^3(x) = \frac{1}{3\ln(C_0/x)}$ и $C(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\ln(C_0/x)}}$, где C_0 – постоянная интегрирования. Подставив найденную функцию $C(x)$ в выражение решения исходного уравнения Бернулли, находим его общее решение $y(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln(C_0/x)}}$.

Пример 2.11. Проинтегрировать уравнение $y'x + y = -xy^2$.

Решение. Решение этого уравнения Бернулли найдем методом подстановки, приняв $y = u \cdot v$. Подставив $y = u \cdot v$ в уравнение, получаем $u' \cdot v \cdot x + u(v' \cdot x + v) = -x \cdot u^2 \cdot v^2$. Функцию v найдем как частное решение уравнения $v' \cdot x + v = 0$. Отсюда $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ и $v = \frac{1}{x}$. Поставив найденное v в уравнение $u' \cdot v \cdot x = -x \cdot u^2 \cdot v^2$, получаем уравнение для нахождения u: $u' = -\frac{u^2}{x}$. Отсюда $\frac{du}{u^2}=-\frac{dx}{x}$. Интегрируя это уравнение, находим $\frac{1}{u}=\ln x+\ln C$. Отсюда $u=\frac{1}{\ln Cx}$ и общее решение исходного уравнения $y=\frac{1}{x\ln Cx}$.

Решить уравнения:

2.39. $y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1}$. **2.40.** $4xy'+3y=-e^x x^4 y^5$.

2.41. $y'+\frac{2y}{x}=3x^2y^{4/3}$. **2. 42.** $y'+y=e^{x/2}\sqrt{y},\ y(0)=9/4$.

2.43. $y'+\frac{3x^2y}{x^3+1}=y^2(x^3+1)\sin x,\ y(0)=1$. **2.44.** $ydx+(x+x^2y^2)dy=0$ (указание: принять за неизвестную функцию x)

2.45. В модели экономического роста Солоу, с производственной функцией Кобба-Дугласа $Y=AK^aL^{1-a}$, изменение производственных фондов $K(t)$ во времени описывается уравнением

$$\frac{dK}{dt}+mK=r\,AL_0^{1-a}e^{n(1-a)t}K^a.$$

Здесь m – коэффициент выбытия фондов; r – норма накопления; n – темп роста трудовых ресурсов L; A и a – параметры производственной функции; $A>0$, $0<a<1$; L_0 – количество трудовых ресурсов на начальный момент времени; функция $L(t)=L_0e^{nt}$ описывает изменение количества трудовых ресурсов. Найти функцию изменения во времени производственных фондов при условии $K(0)=K_0$.

2.46. В модели циклического роста Хавельмо динамика численности занятых $L(t)$ описывается уравнением

$$L'=a\,L-\frac{b}{A}L^{2-a},$$

где A и a параметры однофакторной производственной функции $Y=A\cdot L^a$, $a\in(0,1), A>0$, $b=const>0$. Найти функцию изменения численности занятых.

2.6. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если в области определения его правая часть $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, т.е. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$.

Для того чтобы соотношение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ было уравнением в полных дифференциалах необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Уравнение в полных дифференциалах можно записать в виде $dF(x,y)=0$, поэтому его общее решение определяется в неявном виде $F(x,y)=C$. Функция $F(x,y)$ определяется из условий $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$. Интегрируя по x соотношение $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$, считая y постоянной величиной, находим

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y).$$

Здесь вместо произвольной постоянной C берется некоторая функция $C(y)$ переменной y. Для нахождения функции $C(y)$, подставив $F(x,y)$ в условие $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dC(y)}{dy}=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right),$$

интегрируя его находим функцию $C(y)$. Подставив функцию $C(y)$ в $F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)$, находим искомую функцию $F(x,y)$ и общее решение $F(x,y)=C$ уравнения в полных дифференциалах.

Пример 2.12. Для уравнения

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$$

найти общее решение и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $x_0=1,\quad y_0=2$.

Решение. Проверим, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах. Здесь $P(x,y)=x+y+1$, $Q(x,y)=x-y^2+3$ и $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1$. Следовательно это уравнение в полных дифференциалах и его общее решение ищется в виде $F(x,y)=C$. Для искомой функции $F(x,y)$ имеем $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=x+y+1$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x-y^2+3$. Интегрируя уравнение $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=x+y+1$ по x получаем

$$F(x,y)=\int(x+y+1)dx+C(y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+C(x).$$

Для определения функции $C(y)$, подставив $F(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+xy+x+C(y)$ в уравнение $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x-y^2+3$, получаем $\dfrac{\partial(x^2+xy+x+C(y))}{\partial y}=x-y^2+3$. Отсюда для нахождения $C(y)$ имеем уравнение $\dfrac{dC(y)}{dy}=3-y^2$. Интегрируя это уравнение по y находим

$$C(y)=\int(3-y^2)dy=3y-\frac{y^3}{3}.$$

Подставив найденную функцию $C(y)$ в выражение $F(x,y)$, получаем

$$F(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+3y-\frac{y^3}{3}$$

и общее решение, определяемое как $F(x,y)=C$, $\dfrac{x^2}{2}+xy+x+3y-\dfrac{y^3}{3}=C$ или иначе

$$3x^2+6xy+6x+18y-2y^3=C.$$

Для нахождения частного решения подставим начальные условия $x_0=1,\ y_0=2$ в общее решение и найдем значение произвольной постоянной C:

$$C=3\cdot 1^2+6\cdot 1\cdot 2+6\cdot 1+18\cdot 2-2\cdot 2^3=41.$$

Искомое частное решение имеет вид

$$3x^2+6xy+6x+18y-2y^3=41.$$

Проверить, что следующие уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах и найти их общие решения.

2.47. $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$.

2.48. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

2.49. $3x^2e^y dx+(x^3e^y-1)dy=0$.

2.50. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$.

2.51. $(2x\cos^2 y)dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$.

2.52. $(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0$.

2.53. $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\dfrac{e^y}{1+x^2}dy=0$.

2.54. $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+\dfrac{2y}{x}dy=0$.

2.55. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$.

2.56. $(x\cos 2y+1)dx-(x^2\sin 2y)dy=0$.

2.7. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = f(x),$$

где p_1 и p_2 – некоторые числа, $f(x)$– некоторая функция. При $f(x) \equiv 0$ это уравнение называется линейным *однородным* дифференциальным уравнением 2-го порядка, при $f(x) \neq 0$ – линейным *неоднородным* дифференциальным уравнением 2-го порядка.

Для нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = 0$$

составляется *характеристическое уравнение*

$$l^2 + p_1 \cdot l + p_2 = 0,$$

которое получается из однородного уравнения заменой y'' на l^2, y' на l, y на 1. Общее решение $y_{од}(x)$ однородного уравнения строится в зависимости от корней характеристического уравнения следующим образом:

- если характеристическое уравнение имеет различные действительные корни l_1 и l_2, то

$$y_{од}(x) = C_1 e^{l_1 x} + C_2 e^{l_2 x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные;

- если характеристическое уравнение имеет один действительный корень l кратности два, то

$$y_{од}(x) = (C_1 + C_2 x) e^{l x};$$

- если характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $l_1 = a + i \cdot b$ и $l_2 = a - i \cdot b$, то

$$y_{од}(x) = e^{a \cdot x}(C_1 \cos b\,x + C_2 \sin b\,x).$$

Пример. 2.13. Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $l^2 - 7l + 6 = 0$. Его корни $l_1 = 1$ и $l_2 = 6$ вещественны и различны, следовательно, общее решение данного однородного уравнения имеет вид $y_{од}(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$.

Пример. 2.14. Найти частное решение уравнения $y'' + y' + 0,25y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $l^2+l+0,25=0$ имеет один двукратный корень $l=-0,5$. Поэтому общим решением будет $y_{од}(x)=(C_1+C_2x)e^{-0,5\cdot x}$. Подставляя начальные условия $y(0)=2,\ y'(0)=1$ в общее решение и его производную $y'_{од}(x)=C_2e^{-0,5\cdot x}-0,5\cdot(C_1+C_2x)e^{-0,5\cdot x}$, получаем систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1=2, \\ C_2-0,5\cdot C_1=1. \end{cases}$$

Отсюда получаем $C_1=2$, $C_2=2$ и искомое частное решение

$$y_{од}(x)=(2+2x)e^{-0,5\cdot x}.$$

Пример. 2.15. Найти общее решение уравнения $y''-4y'+13y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $l^2-4l+13=0$. Оно имеет два комплексно сопряженных корня $l_1=2+3i$ и $l=2-3i$. Следовательно, общим решением исходного однородного уравнения будет $y_{од}(x)=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

Общее решение $y(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y''+p_1\cdot y'+p_2\cdot y=f(x)$$

равно сумме любого его частного решения $y_{ч.н.}(x)$ и общего решения $y_{од}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''+p_1\cdot y'+p_2\cdot y=0$, т.е. $y(x)=y_{ч.н.}(x)+y_{од}(x)$.

Нахождение частного решения $y_{ч.н.}(x)$ неоднородного уравнения *методом неопределенных коэффициентов*. Этот метод применим к линейным дифференциальным уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами только в случае, когда правая имеет вид:

$$f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx],$$

где a и b – постоянные величины, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены соответственно n-ой и m-ой степени. В этом случае частное решение $y_{ч.н.}(x)$ ищется в виде:

$$y_{ч.н.}(x)=x^ke^{ax}[P_s^*(x)\cos bx+Q_s^*(x)\sin bx].$$

Здесь k равно числу корней характеристического уравнения $l^2+p_1\cdot l+p_2=0$ равных $a+i\cdot b$, s равно максимальному из чисел n и m, $P_s^*(x)$ и $Q_s^*(x)$ – многочлены степени s с неопределенными коэффициентами. Неопределенные коэффициенты многочленов $P_s^*(x)$ и $Q_s^*(x)$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой после подстановки искомого частного решения в неоднородное уравнение и приравнивания подобных членов в правой и левой частях этого уравнения. Отсюда в частности получаем.

- При $f(x)=P_n(x)$ $(a=b=0)$, частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{ч.н.}(x)=x^k\cdot P_n^*(x),$$

где k – число нулевых корней характеристического уравнения, $P_n^*(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\mathbf{K}+A_n$ – многочлен степени n с неизвестными коэффициентами $A_0, A_1, \mathbf{K}, A_n$.

- При $f(x)=e^{ax}\cdot P_n(x)$ $(a\neq 0,\, b=0)$ частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{ч.н.}(x)=x^k\cdot e^{ax}\cdot P_n^*(x),$$

где k – число корней характеристического уравнения равных a, $P_n^*(x)$ – многочлен степени n с неизвестными коэффициентами.

- При $f(x)=P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx$ $(a=0,\, b\neq 0)$ частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{ч.н.}(x)=x^k[P_s^*(x)\cos bx+Q_s^*(x)\sin bx],$$

где k – число корней характеристического уравнения равных $i\cdot b$, $P_s^*(x)$ и $Q_s^*(x)$– многочлены степени $s=\max\{n,m\}$ с неизвестными коэффициентами. Если $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ многочлены нулевой степени, т.е. $P_n(x)=a$ и $Q_m(x)=b$, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{ч.н.}(x)=x^k(A\cos bx+B\sin bx),$$

где A и B неизвестные коэффициенты.

Пример 2.16. Найти общее решение уравнения $y''-3y'+2y=x^2+3x$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с $f(x)=x^2+3x$. Общее решение ищем как сумму $y(x)=y_{од}(x)+y_{ч.н.}(x)$ общего решения $y_{од}(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y_{ч.н.}(x)$ неоднородного уравнения. Характеристическое уравнение $l^2-3l+2=0$ имеет корни $l_1=1$ и $l_2=2$. Следовательно,

$$y_{од}(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

Правая часть неоднородного уравнения является многочленом 2-ой степени $f(x)=P_2(x)=x^2+3x$, характеристическое уравнение не имеет нулевых корней $(k=0)$, поэтому частное решение $y_{ч.н.}(x)$ ищем в виде многочлена второй степени $y_{ч.н.}(x) = Ax^2 + Bx + C$ с неизвестными коэффициентами A, B и C. Для их нахождения подставим $y_{ч.н.}(x) = Ax^2 + Bx + C$ и ее производные $y'_{ч.н.}(x) = 2Ax + B$, $y''_{ч.н.}(x) = 2A$ в исходное неоднородное уравнение. После приведения подобных получим равенство двух многочленов 2-ой степени:

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + (2C - 3B + 2A) = x^2 + 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно A, B и C:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 6A = 3, \\ 2C - 3B + 2A = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получаем $A = 1/2$, $B = 3$ и $C = 4$. Подставив найденные значения коэффициентов в частное решение, окончательно получаем

$$y_{ч.н.}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4.$$

Отсюда искомое общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4.$$

Пример 2.17. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = xe^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Решение. Общее решение ищем в виде $y(x) = y_{од}(x) + y_{ч.н.}(x)$, суммы общего решения $y_{од}(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y_{ч.н.}(x)$ неоднородного уравнения. Характеристическое уравнение $l^2 - 2l + 1 = 0$ имеет единственный корень $l = 1$ кратности 2. Следовательно,

$$y_{од}(x) = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Правая часть неоднородного уравнения равна xe^x, т.е. имеет вид $P_1(x)e^{ax}$ с $P_1(x) = x$ и $a = 1$. Характеристическое уравнение имеет единственный корень $l = 1$ кратности 2, поэтому частное решение $y_{ч.н.}(x)$ ищем в виде

$$y_{ч.н.}(x) = x^2(Ax + B)e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x$$

с неизвестными коэффициентами A и B. Для их нахождения подставим $y_{ч.н.}(x) = (Ax^3 + Bx^2)\cdot e^x$ и ее производные $y'_{ч.н.}(x) = [Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]\cdot e^x$, $y''_{ч.н.}(x) = [Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B]\cdot e^x$ в исходное неоднородное уравнение. После приведения подобных членов получим равенство: $(6Ax + 2B)e^x = xe^x$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $6A=1$ и $2B=0$. Следовательно, $y_{ч.н.}(x)=\frac{1}{6}x^3\cdot e^x$, а общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

Из начальных условий $y(0)=2$, $y'(0)=1$ получаем систему уравнений для нахождения произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1=2, \\ C_2+C_1=1. \end{cases}$$

Подставив ее решение $C_1=2, C_2=-1$ в общее решение, получаем искомое частное решение неоднородного уравнения

$$y(x)=(2-x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

Пример 2.18. Найти общее решение уравнения $y''+y=3\sin 2x$.

Решение. Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка ищем в виде $y(x)=y_{од}(x)+y_{ч.н.}(x)$. Характеристическое уравнение $l^2+1=0$ имеет комплексно сопряженные корни $l_1=1\cdot i$ и $l_2=-1\cdot i$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+y=0$ имеет вид

$$y_{од}(x)=e^{0\cdot x}(C_1\cos(1\cdot x)+C_2\sin(1\cdot x))=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Правая часть неоднородного уравнения равна $3\sin 2x$. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{ч.н.}(x)=x^k(A\cos bx+B\sin bx)$$

с $b=2$. Так как характеристическое уравнение не имеет корней равных $2\cdot i$, то $k=0$. Поэтому $y_{ч.н.}(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$. Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B подставим частное решение и ее производные $y'_{ч.н.}(x)=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$, $y''_{ч.н.}(x)=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$ в исходное неоднородное уравнение. После приведения подобных членов получим равенство

$$-3A\cos 2x-3B\sin 2x=3\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в обеих частях этого равенства, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} -3A=0, \\ -3B=3. \end{cases}$$

Отсюда получаем $A=0$, $B=-1$, $y_{ч.н.}(x)=-\sin 2x$ и искомое общее решение

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\sin 2x.$$

Найти общие решения уравнений. При заданных начальных условиях найти частные решения уравнений.

2.57. $y''-4y'+3y=0$.

2.58. $y''+5y'+6y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=-6$.

2.59. $y''-4y'+4y=0;\ y(0)=2,\ y'(0)=5$.

2.60. $y''-10y'+25y=0;\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

2.61. $y''-4y'+13y=0$.

2.62. $y''+9y=0;\ y(0)=0,\ y(p/4)=1$.

2.63. $y''-4y=8x^3$.

2.64. $y''-4y'+3y=e^{5x};\ y(0)=3,\ y'(0)=9$.

2.65. $y''-2y=xe^{-x}$.

2.66. $y''-6y'+8y=3x^2+2x+1$.

2.67. $y''+3y'+2y=\sin 2x+2\cos 2x$.

2.68. $y''+y=\cos 3x;\ y(p/2)=4,\ y'(p/2)=1$.

2.69. Найти функцию изменения равновесной цены $p(t)$ на товар, если спрос на него $D(t)$ и предложение $S(t)$ описываются следующими соотношениями $D(t)=3p''-p'-2p+18$, $S(t)=4p''+p'+3p+3$.

2.70. Модель динамики цены $p(t)$ с учетом изменения запасов $z(t)$, в предположении что спрос и предложение определяются соответственно функциями $D(t)=p_e-d\cdot(p-p_e)$ и $S(t)=p_e+s\cdot(p-p_e)$, описывается уравнениями

$$\frac{dz}{dt}=S(t)-D(t)=(s+d)(p-p_e),\quad \frac{dp}{dt}=-k(z-z_0).$$

Здесь p_e – значение равновесной цены; величины d, s, k – положительные постоянные; z_0 – заданный уровень запасов. Эта система уравнений сводится к уравнению

$$p''=-k(s+d)(p-p_e).$$

Найти функции $p(t)$ и $z(t)$, описывающие динамику цены и запаса в этой модели.

2.71. В модели инвестирования Эйзнера-Штротца динамика капитала K описывается уравнением

$$K'' - rK' - \frac{b}{a}K = \frac{br - a}{2a}.$$

Здесь a, b, r, a, b – параметры модели. Найти функцию изменения капитала $K(t)$.

2.8. Дифференциальные уравнения разных типов

Решить уравнения. При заданных начальных условиях найти частные решения.

2.72. $y' - (2x+2)\sqrt{1-y^2} = 0, \quad y(0) = 1.$

2.73. $\sqrt{x}dy - ydx = dx, \quad y(0) = 0.$

2.74. $xdy + ydx = \sin x\, dx, \quad y(p/2) = 2/p.$

2.75. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}.$

2.76. $xy' - y = x\sqrt{x}.$

2.77. $y'x + y + xy^2 = 0.$

2.78. $xy' + y = y^2 \ln x.$

2.79. $y'' - 4y' = 4e^{4x}.$

2.80. $y'' - y' = x + 4.$

2.81. $y'' + y = \cos x + \sin 5x.$

2.82. $y'' + y' = x \sin x.$

2.83. $y'' + y = x = 2e^x.$

2.9. Вариант теста и контрольной работы по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Тест по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Определение ОДУ первого порядка, его решения, общего решения, частного решения.
2. Какая из приведенных функций является решением дифференциального уравнения $x^2y' + y = 0$? Ответ обосновать.

А) $y=2e^{\frac{1}{x}}$; Б) $y=2e^{x}$; В) $y=x^2+x$; Г) $y=x\sin x$.

3. Для каждого из приведенных дифференциальных уравнений указать его тип (уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение, линейное ОДУ 1-го порядка, уравнение Бернулли, уравнение в полных дифференциалах).

А) $xy'+y\ln\frac{y}{x}=0$; Б) $2y'+y=y^3(x-1)$;

В) $(1+x^2)y'+yx-y\sqrt{1+x^2}=0$; Г) $x^2dy+2xydx=e^xdx$.

4. Выписать общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'+4y=0$.

5. В каком виде ищется частное решение уравнения $y''-5y'+4y=xe^{4x}$?

А) $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$; Б) $y=(Ax+B)e^{4x}$;

В) $y=(Ax+B)xe^{4x}$; Г) $y=C_1e^x+C_2e^{4x}+(Ax^2+Bx)e^{4x}$.

6. Решение какого из уравнений находится как $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$?

А) $y'+p(x)y=q(x)$; Б) $y'+p(x)y=q(x)y^m$,

В) $q(x)dy+p(x)ydx=0$; Г) $y'+q(x)y=p(x)$.

Контрольная работа по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Найти общие решения уравнений:

1) $(1+x^2)dy+ydx=0$;

2) $xy'+y=-xy^2$;

3) $y''-4y'+3y=0$;

4) $y''+3y'+2y=\sin 2x+2\cos 2x$.

Найти частные решения уравнений:

5) $y'(4+x^2)+y^2=0,\quad x_0=2,\ y_0=8/p$;

6) $xy'-y=xtg(y/x),\quad x_0=1,\ y_0=p/2$;

7) $y'\cos^2 x+y=tgx,\quad x_0=0,\ y_0=0.$

Ответы

1. Ряды

1.2. 1) $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$; 2) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^a}$; 3) $a_n = \frac{1}{n!}$; 4) $a_n = \frac{n^2}{n!}$; 5) $a_n = \frac{1}{2^n + n}$; 6) $a_n = \frac{(2n-1)^2}{n^2}$; 7) $a_n = \frac{2^n+1}{5^n+1}$; 8) $a_n = 3^n + (-1)^n$; 9) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$.

1.3. 1) Сходится, $S = 3/2$. 2) Сходится, $S = \sqrt[3]{2}/(\sqrt[3]{2}-1)$. 3) Расходится. 4) Сходится, $S = 2/3$. 5) Расходится. 6) Расходится. 7) Сходится, $S = 1/2$. 8) Сходится, $S = 11/18$. 9) Сходится, $S = 1/4$. *Указание:* представить общий член ряда в виде суммы простейших дробей. 10) Сходится, $S = 1/2$. 11) Сходится, $S = 1$. 12) Расходится.

1.4. 1) выполняется; 2) не выполняется; 3) не выполняется; 4) выполняется; 5) выполняется.

1.5. 1) расходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) расходится; 6) сходится; 7) расходится; 8) сходится; 9) расходится; 10) сходится.

1.6. 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) расходится; 6) сходится; 7) расходится; 8) сходится; 9) здесь $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, поэтому признак Даламбера не позволяет судить о сходимости данного ряда и нужно использовать другой признак сходимости; 10) здесь $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, поэтому признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, нужно использовать другие признаки сходимости.

1.7. 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) сходится.

1.8. 1) расходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится; 5) сходится; 6) сходится; 7) расходится; 8) расходится; 9) расходится; 10) расходится.

1.9. 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) сходится; 7) сходится; 8) расходится; 9) расходится; 10) расходится; 11) сходится; 12) сходится; 13) расходится; 14) расходится.

1.10. 1) условно сходится; 2) абсолютно сходится; 3) абсолютно сходится; 4) условно сходится; 5) расходится; 6) условно сходится; 7) абсолютно сходится; 8) условно сходится; 9) абсолютно сходится; 10) абсолютно сходится; 11) абсолютно сходится; 12) расходится.

1.11. 1) $-3 \le x < 3$; 2) $-5 < x \le 5$; 3) $-\infty < x < +\infty$; 4) ряд сходится только при $x = 0$; 5) $-1 \le x \le 1$; 6) $-3 < x < 3$; 7) $-1 < x < 1$; 8) $-2 \le x < 2$; 9) $-1 \le x \le 1$; 10) $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$.

1.12. 1) $3^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \ln^n 3}{n!}$, $|x| < +\infty$.

2) $\frac{1}{\sqrt{e^x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n n!}$, $|x| < +\infty$.

3) $x^2 e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^{n+2}}{n!}$, $|x| < +\infty$.

4) $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$, $|x| < +\infty$.

5) $\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+1)!}$, $|x| < +\infty$.

6) $x^3 \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n)!}$, $|x| < +\infty$.

7) $\ln(1 - x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$, $|x| < 1$.

8) $\ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x| < 1$.

9) $\ln(x^2 - 3x + 2) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 1)x^n}{n \cdot 2^n}$, $|x| < 1$. *Указание*: использовать представление $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ и свойства логарифма.

10) $\ln(x^2 - 5x + 4) = \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 4^{-n}) \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$.

11) $\sqrt[3]{27 + x} = 3 + \frac{x}{27} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \mathbf{K} \cdot (3n-4)}{3^{4n-1} n!} x^n$, $|x| < 27$.

12) $\frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $|x| < 1$.

13) $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!\, x^{2n}}{2^{2n+1} (2n)!!}$, $|x| < 2$.

14) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{3}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<1$. *Указание.* Использовать разложение дробно-рациональной функции на простейшие дроби: $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x}$.

15) $\dfrac{7-2x}{x^2-7x+12}=\dfrac{7}{12}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<3$. *Указание:* Использовать разложение $\dfrac{7-2x}{x^2-7x+12}=\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{4-x}$. 16) $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $|x|<1$.

17) $\dfrac{\sin x}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}$, $|x|<\infty$ и $x\neq 0$.

1.13. 1) $e^{x/a}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e\dfrac{(x-a)^n}{n!a^n}$, $|x|<\infty$. 2) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e\left(\dfrac{(x-1)^n}{n!}\right)$, $|x|<\infty$.

3) $\dfrac{1}{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$, $0<x<2$. 4) $\dfrac{1}{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$, $0<x<4$.

5) $\sqrt[3]{x}=-1+\dfrac{x+1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\mathbf{K}\cdot(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}(x+1)^{n+1}$, $-2<x<0$.

6) $\sqrt{x}=2\left[1+\dfrac{(x-4)}{2^3\cdot 1!}-\dfrac{(x-4)^2}{2^6\cdot 2!}+\dfrac{1\cdot 3(x-4)^3}{2^9\cdot 3!}-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5(x-4)^4}{2^{12}\cdot 4!}+\mathbf{K}\right]$, $0<x<8$.

7) $\sin 3x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(3x+p)^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $|x|<\infty$.

8) $\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\dfrac{(x-p/2)}{1!\cdot 2}-\dfrac{(x-p/2)^2}{2!\cdot 2^2}+\mathbf{K}\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-p/2)^{n-1}}{(n-1)!\cdot 2^{n-1}}\cos\dfrac{(2n-1)p}{4}$, $|x|<\infty$.

1.14. $\arcsin x=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$, $-1<x<1$. *Указание:* предварительно, используя биномиальный ряд, получить разложение функции $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.15. $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$, $-1 \le x \le 1$. *Указание:* предварительно получить разложение функции $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и учесть, что $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

1.16. $\int_0^x \cos t^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n-3}}{(4n-3)(2(n-1))!} = x - \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 6!} + \mathbf{K}$, $|x| < \infty$. *Указание:* получить разложение функции $\cos t^2$ и проинтегрировать его почленно.

1.17. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \mathbf{K}$. *Указание:* Использовать решение пункта 17 из 1.12.

1.18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Указание:* Использовать $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ и решение пункта 12 из 1.12.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $|x| < 1$.

1.20. $\cos x = (\sin x)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

1.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$, $|x| < \infty$. **1.22.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$. *Указание:* Из примера 1.29 следует равенство $\int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1}) dt = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$, которое нужно продифференцировать.

1.23. $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x} = x$. *Указание:* Использовать представление $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x} = e^{-x} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ и разложение в степенной ряд функции e^x.

1.24. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x} = x^2 + x$. *Указание:* Использовать представление $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x} = e^{-x} x \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)+1] \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ и разложение в степенной ряд функции e^x.

1.25. 1) $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$ при $x \in (-p, p)$. В точках $x = \pm p$ сумма ряда равна нулю.

2) $x^2 = \frac{p^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$. Это равенство справедливо для любых $x \in [-p, p]$, так как в точках $x = \pm p$ сумма ряда, равная $\frac{f(-p) + f(p)}{2} = \frac{p^2 + p^2}{2} = p^2$, совпадает со значениями функции $f(x) = x^2$. 3) $x - p = -p + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$, при $x \in (-p, p)$. В точках $x = \pm p$ сумма ряда равна $-p$. 4) $2x + 3 = 3 + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$, при $x \in (-p, p)$. В точках $x = \pm p$ сумма ряда равна трем. 5) $2 - 3x = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$, при $x \in (-p, p)$. В точках $x = \pm p$ сумма ряда равна двум. 6) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{p}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ в точках непрерывности из интервала $(-p, p)$. В точке разрыва $x_0 = 0$ и точках $x = \pm p$ сумма ряда равна $\frac{1}{2}$.

7) $f(x) = \frac{p}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2\cos(2n-1)x}{p(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} \right]$, при $x \in (-p, p)$. В точках $x = \pm p$ сумма ряда равна $p/2$. 8) $f(x) = \frac{p}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2\cos(2n-1)x}{p(2n-1)^2} + \frac{(-1)^n \sin nx}{n} \right]$, при $x \in (-p, p)$. В точках $x = \pm p$ сумма ряда равна $p/2$.

1.26. 1) $x = \frac{2l}{p}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\frac{npx}{l}$ при $x \in (-l, l)$. В точках $x = \pm l$ сумма ряда равна нулю.

2) $|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)p\,x}{l}$ при любых $x\in[-l,l]$.

3) $f(x)=-\frac{4}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)p\,x}{l}$ в точках непрерывности из интервала $(-l,l)$.

В точках $x=\pm l$ и $x=0$ сумма ряда равна нулю.

4) $f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{p(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)p\,x}{l}+\frac{(-1)^n}{2n}\sin\frac{np\,x}{l}\right]$.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

2.1. 1) второго порядка; 2) третьего порядка; 3) первого порядка; 4) второго порядка.

2.2. 1) является; 2) является; 3) является; 4) является; 5) является.

2.3. 1) является; 2) является; 3) является; 4) является.

2.4. 1) $C=2,\ y=2(\sin x-1)+2e^{-\sin x}$; 2) $C=3,\ y=t^3(\ln t-1)+3t^2$;

3) $C_1=-0,5,\quad C_2=2$, $y=-0,5\cos 2x+2\sin 2x$; 4) $C_1=1,C_2=-3,\ y=e^x-3xe^x+e^{2x}$.

2.5. $y=C\cdot\frac{x+1}{e^x}$. **2.6.** $x=C\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}$. **2.7.** $\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C$.

2.8. $x=C\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$. **2.9.** $y=\frac{C-x}{1+Cx}$. **2.10.** $y=\arccos e^{Cx}$.

2.11. $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$. **2.12.** $\sqrt{y}=x\ln x-x+1$. **2.13.** $2^x-2^y=\frac{3}{32}$.

2.14. $2(x-2)=\ln^2 y$. **2.15.** $\ln|tg\,y|=4(1-\cos x)$. **2.16.** $q(p)=100-\frac{100}{p}$.

2.17. $y=Cx^a$. **2.18.** $y=Ce^{rx}$. **2.19.** $C(q)=6+4q+0,02q^2$.

2.20. $L(t)=\frac{0,1\cdot L_m}{0,1+0,9e^{-at}}$. **2.21.** $q(t)=\frac{q_0q_me^{q_mkt}}{(q_m-q_0)+q_0e^{q_mkt}}$. **2.22.** $y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}$.

2.23. $x^2-y^2=Cx$. **2.24.** $y^2=2x^2\ln\frac{C}{x}$. **2.25.** $arctg(0,5y/x)-2\ln|x|=p/4$.

2.26. $y=x\arcsin x$. **2.27.** $y=-x\ln|1-\ln x|$. **2.28.** $y=Cx^3-x^2$.

2.29. $y=\dfrac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$. **2.30.** $y=e^{-x^2}(x^2/2+C)$. **2.31.** $y=arctg\,x-1+Ce^{-arctg\,x}$.

2.32. $y=e^{-\arcsin x}+\arcsin x-1$. **2.33.** $y=-\cos x$. **2.34.** $K(t)=\dfrac{rI}{m}+Ce^{-m\cdot t}$.

2.35. $p(t)=5+5\cdot e^{-0,4\cdot t}$. **2.36.** $S(t)=\dfrac{c_0}{r}+(S_0-\dfrac{c_0}{r})e^{r\cdot t}$. **2.37.**

$y(t)=(y_0-\dfrac{bc_0}{b-r})e^{b\cdot t}+\dfrac{bc_0}{b-r}e^{r\cdot t}$. **2.38.** $q(p)=Cp^a-b/a$. **2.39.** $y=\dfrac{x-1}{C-x}$.

2.40. $y^{-4}=x^3(e^x+C)$. **2.41.** $y^{-1/3}=Cx^{2/3}-(3/7)x^3$. **2.42.** $y=e^{-x}[(1/2)e^x+1]^2$.

2.43. $y=\dfrac{1}{\cos x(x^3+1)}$. **2.44.** $x=\dfrac{1}{y(y+C)}$.

2.45. $K(t)=e^{nt}\left(Ce^{-(1-a)(n+m)t}+\dfrac{rAL_0^{1-a}}{(1-a)(n+m)}\right)^{1/(1-a)}$, где $C=K_0^{1-a}-\dfrac{rAL_0^{1-a}}{(1-a)(n+m)}$.

2.46. $L(t)=e^{a\cdot t}\left(C+\dfrac{b}{a\cdot A}e^{a(1-a)t}\right)^{\frac{1}{a-1}}$. **2.47.** $\dfrac{x^4}{4}+xy-\dfrac{y^2}{2}=C$. **2.48.** $x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

2.49. $x^3e^y-y=C$. **2.50.** $y+xe^{-y}=C$. **2.51.** $x^2\cos^2 y+y^2=C$.

2.52. $x^3+2xy-3y=C$. **2.53.** $\dfrac{e^y-1}{1+x^2}=C$. **2.54.** $4x^2+y^2=Cx$.

2.55. $x^3y-2x^2y^2+3y^4=C$. **2.56.** $\dfrac{x^2\cos 2y}{2}+x=C$. **2.57.** $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

2.58. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$, $y=4e^{-3x}-3e^{-2x}$. **2.59.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$, $y=(3+x)e^{2x}$.

2.60. $y=(C_1+C_2x)e^{5x}$, $y=xe^{5x}$. **2.61.** $y=e^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$.

2.62. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$, $y=\sqrt{2}\sin 3x$. **2.63.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$.

2.64. $y=(e^{5x}+22e^{3x}+e^x)/8$. **2.65.** $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}-(x-2)e^{-x}$.

2.66. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}+(24x^2+52x+41)/64$.

2.67. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+0,25(-\cos 2x+\sin 2x)$. **2.68.** $y=-\dfrac{11}{8}\cos x+4\sin x-\dfrac{1}{8}\cos 3x$.

2.69. *Указание*. Из условия равновесия на рынке товара, $D(t)=S(t)$, получается следующее уравнение для равновесной цены $p''+2p'+5p=15$. Отсюда

$p(t)=e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+3$. **2.70.** $p(t)=p_e+C_1\cos(t\sqrt{k(s+d)})+C_2\sin(t\sqrt{k(s+d)})$,

$z(t)=z_0-\sqrt{\dfrac{s+d}{k}}(C_2\cos(t\sqrt{k(s+d)})-C_1\sin(t\sqrt{k(s+d)}))$.

2.71. $K(t)=C_1e^{l_1t}+C_2e^{l_2t}+\dfrac{a-br}{2b}$, где $l_{1,2}=\dfrac{1}{2}(r\pm\sqrt{r^2+\dfrac{4b}{a}})$.

2.72. $y=\cos(x^2+2x)$. **2.73.** $y=e^{2\sqrt{x}}-1$. **2.74.** $y=\dfrac{1-\cos x}{x}$. **2.75.** $y=\dfrac{2x}{1-Cx^2}$.

2.76. $y=2x\sqrt{x}+Cx$. **2.77.** $y=\dfrac{1}{x\ln Cx}$. **2.78.** $y(\ln x+1+Cx)=1$.

2.79. $y=e^{4x}(C_1+x)+C_2$. **2.80.** $y=C_1+C_2e^x-\dfrac{x^2}{2}-5x$.

2.81. $y=(C_1+x/2)\sin x+C_2\cos x-(1/24)\sin 5x$.

2.82. $y=C_1+C_2e^{-x}+(1-x/2)\sin x-((x+1)/2)\cos x$. **2.83.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+e^x$.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Высшая матеметика. – М.: Высш. шк., 2006. – 479 с.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 439 с.
3. Лебедев В.В. Математика в экономике и управлении. – М.: НВТ-Дизайн, 2004. – 480 с.
3. Лебедев В.В. Математические модели динамических социально-экономических процессов. – М.: Гос. акдем. урпавл., 1992. – 265 с.
4. Дыхта В.А. Динамические модели в экономике. Введение в анализ одномерных моделей. Учебное пособие. – Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2003. – 178 с.
5. Журавлев С.Г., Аниковский В.В. Дифференциальные уравнения. Сборник задач. – М.: Экзамен, 2005. – 128 с.
6. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. – М.: Высш. шк., 2006. – 304 с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г. Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. – М.: Высш. шк. 1997. – 416 с.

Учебно-методическое издание

Абдуллин Рафаэль Зинатович
Абдуллин Владимир Рафаэлевич

МАТЕМАТИКА-1.
РЯДЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник задач

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка В.Р. Абдуллин

ИД № 06318 от 26.11.01
Подписано в печать 19.12.08. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,1. Тираж 500 экз. Заказ .

Издательство Байкальского государственного университета
экономики и права.
664003, Иркутск, ул. Ленина, 11.
Отпечатано в ИПО БГУЭП.